

Wpłynęło dnia 11.03.2026
L.dz. 11/2025
Podpis W

Dr hab. inż. Bogdan Batko

Instytut Informatyki i Matematyki Komputerowej
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Kraków, 8 marca 2026 roku

Ocena osiągnięć dr inż. Macieja Starostki
w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia naukowego
doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych,
w dyscyplinie matematyka

Dr Maciej Starostka jest adiunktem w Instytucie Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej. Stonień doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka uzyskał w 2017 roku w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk na podstawie rozprawy *E-kohomologiczny indeks Conleya*. Promotorem w jego przewodzie doktorskim był prof. dr hab. Marek Izydorek.

W lipcu 2026 roku złożył do Rady Dziedziny Naukowej Nauki Ścisłe Politechniki Gdańskiej wniosek o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka na podstawie osiągnięcia naukowego obejmującego cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem *Teoria Morse'a dla hamiltonowskiego funkcjonału działania i klasy funkcjonałów na przestrzeni Banacha*, składający się z sześciu prac (numeracja jak w autoreferacie):

- [H1] L. Asselle, M. Starostka, The Palais–Smale condition for the Hamiltonian action on a mixed regularity space of loops in cotangent bundles and applications, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2020.
- [H2] L. Asselle, M. Starostka, Morse homology for the Hamiltonian action in cotangent bundles, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2025.
- [H3] L. Asselle, M. Starostka, A note on the Morse homology for a class of functionals in Banach spaces involving the $2p$ -area functional, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 2024.
- [H4] M. Starostka, Connected components of the space of proper gradient vector fields, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 2022.
- [H5] L. Asselle, M. Izydorek, M. Starostka, The Arnold conjecture in CP^n and the Conley index, *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, 2023.
- [H6] L. Asselle, M. Starostka, On the degenerate Arnold conjecture on T^{2m} and CP^n , *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 2025.

Artykuły opublikowane zostały w okresie od 2020 do 2025 roku w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach. Dwa z nich ([H1] i [H2]) opublikowane są w *Calculus of Variations and PDEs* - jednym z wiodących czasopism matematycznych w dziedzinie rachunku wariacyjnego i równań różniczkowych cząstkowych, o najwyższej punktacji w wykazie Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Prace [H1] - [H6] wpisują się w program badawczy rozpoczęty kilka lat temu przez dra Starostkę we współpracy z A. Abbondandolo i L. Asselle, mający na celu rozwijanie alternatywnych wobec teorii Floera podejść do układów hamiltonowskich, zarówno dla abstrakcyjnych funkcjonałów, jak i dla funkcjonału działania hamiltonowskiego na przestrzeni pętli pewnych rozmaitości symplektycznych. Motywacją jest, między innymi, uzyskanie wyników dotyczących zdegenerowanej hipotezy Arnolda dla możliwie szerokiej klasy rozmaitości symplektycznych.

Zaletą takiego podejścia w porównaniu z homologią Floera jest fakt, że istnienie globalnie zdefiniowanego potoku gradientowego o dobrych własnościach pozwala na rozważanie znacznie szerszej klasy perturbacji, co z kolei sprawia, że problemy transwersalności są łatwiejsze do

przewyciężenia niż w teorii Floera. Równanie potoku nie musi być lokalne, co potencjalnie umożliwia badanie również problemów nielokalnych. Ponadto powstająca w ten sposób teoria powinna być bogatsza niż teoria homologii Floera. Istnieją bowiem konstrukcje, które wydają się zbyt złożone, aby można je było uzyskać za pomocą homologii Floera - między innymi z powodu wspomnianych problemów z transversalnością - natomiast mogą być osiągnięte w teorii o bardziej topologicznym charakterze, która pozwala na stosowanie argumentów z teorii Conleya i teorii homotopii.

Przejdę do omówienia zawartości cyklu artykułów.

Prace [H1] i [H2] poświęcone są konstrukcji kompleksu Morse'a-Smale'a dla układu hamiltonowskiego na wiązkach kostycznych rozmaitości. Jednym z głównych zagadnień geometrii symplektycznej jest poszukiwanie rozwiązań okresowych, w szczególności jednookresowych, układu hamiltonowskiego wyznaczonego przez zależny od czasu hamiltonian na rozmaitości symplektycznej. Rozwiązania te można interpretować jako punkty krytyczne odpowiednio zdefiniowanego funkcjonału - hamiltonowskiego funkcjonału działania na przestrzeni pętli ściągalnych ($\mathcal{A}_H$). Klasyczne metody wariacyjne, takie jak teoria Morse'a - również w nieskończenowym wymiarowej wersji rozwiniętej przez Palaisa - nie pozwalają bezpośrednio wnioskować o istnieniu punktów krytycznych funkcjonału $\mathcal{A}_H$ ze względu na nieskończony indeks i koindeks Morse'a punktów krytycznych.

Rabinowitz zauważył, że działanie hamiltonowskie na $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$ rozkłada się na część kwadratową, będącą ciągłą formą kwadratową na przestrzeni pętli Sobolewa $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$, oraz część hamiltonowską, której gradient w przestrzeni $H^{1/2}$ jest operatorem zwartym. Wykorzystując tę obserwację oraz aproksymacje skończenowymiarowe, C. Conley i E. Zehnder udowodnili hipotezę Arnolda dla torusa T^{2n} .

Pod koniec lat osiemdziesiątych A. Floer zaproponował przełomowe podejście działające dla rozmaitości symplektycznych zamkniętych (możliwe są uogólnienia). Zastąpienie gradientu $H^{1/2}$ funkcjonału działania $\mathcal{A}_H$ gradientem L^2 prowadzi formalnie do równania potoku gradientowego, które interpretowane jako równanie różniczkowe cząstkowe okazuje się nieliniowym, zaburzonym równaniem Cauchy'ego-Riemanna. Pozwoliło to Floerowi zdefiniować kompleks łańcuchowy generowany przez ściągalne rozwiązania jednookresowe, z operatorem brzegu określonym poprzez zliczanie rozwiązań odpowiedniego równania Cauchy'ego-Riemanna asymptotycznych do par orbit okresowych o indeksach Conleya-Zehndera różniących się o jeden. Floer pokazał izomorfizm tej homologii z homologią singularną rozmaitości dla odpowiednich współczynników. Otrzymana w ten sposób teoria homologii Floera wykracza poza pierwotny cel, jakim było udowodnienie (homologicznej) hipotezy Arnolda o liczbie punktach stałych niezdegenerowanego dyfeomorfizmu hamiltonowskiego zamkniętej rozmaitości symplektycznej.

Jednak w niektórych szczególnych przypadkach możliwe jest zastosowanie metod bardziej klasycznych. Pytanie, w jakim zakresie metody wywodzące się od Rabinowitza, Conleya i Zehndera można uogólnić na ogólne rozmaitości symplektyczne jest zasadne między innymi dlatego, że podejście oparte na kompleksie Morse'a ma istotne zalety w porównaniu z metodą Floera, głównie dzięki wspomnianej już możliwości stosowania argumentów o bardziej topologicznym charakterze.

Dlatego celem pracy [H1] jest wskazanie dalszych przykładów rozmaitości symplektycznych, na których funkcjonał działania generuje ujemny potok gradientowy o dobrych własnościach analitycznych na odpowiedniej przestrzeni pętli. Autorzy badają wiązkę kostyczną domkniętej rozmaitości ze standardową strukturą symplektyczną. Pokazują, że dla hamiltonianów spełniających określone warunki wzrostu funkcjonał działania na rozmaitości Hilberta pętli odpowiedniej klasy Sobolewa spełnia warunek Palais-Smale'a - kluczowy w nieskończenowym wymiarowej teorii Morse'a. Wynik ten prowadzi do uproszczonego dowodu twierdzenia Hofera i Viterbo.

W pracy [H2] autorzy rozwijają wyniki [H1] pokazując, że dla funkcjonału $\mathcal{A}_H$ można skonstruować kompleks Morse'a przy użyciu podejścia A. Abbondandolo i P. Majera *A Morse*

complex for infinite dimensional manifolds - Part I. Kompleks budowany jest poprzez analizę jednowymiarowych przecięć rozmaitości stabilnych i niestabilnych par punktów krytycznych. Mimo nieskończonego wymiaru przestrzeni, przecięcia te są skończeniowymiarowe i mają dobre własności zwartości; przy założeniu transwersalności ich wymiar jest równy różnicy relatywnych indeksów Morse'a. Autorzy pokazują ponadto, że transwersalność można uzyskać poprzez generyczne zaburzenie ujemnego pseudogradientu.

Dla przytoczenia głównego wyniku [H2] założymy, że M jest rozmaitością zamkniętą, $H : \mathbb{T} \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ gładkim hamiltonianem (z pewnymi dodatkowymi założeniami) oraz $\mathcal{A}_H : \mathcal{M}^{1-s} \rightarrow \mathbb{R}$ hamiltonowskim funkcjonałem działania na wiązce Hilberta $\mathcal{M}^{1-s}$ nad rozmaitością Hilberta $H^s(S^1, M)$, $s \in (1/2, 3/4)$ (szczegóły w [H2, Theorem 1.2]). Autorzy dowodzą, że dla każdego s zdefiniować można kompleks Morse'a o współczynnikach w $\mathbb{Z}_2$, kohomologie tego kompleksu nie zależą od wyboru hamiltonianu i są izomorficzne zarówno z kohomologiami singularnymi przestrzeni wolnych pętli na M , jak i z kohomologiami Floera wiązki kostycznej T^*M . W ostatniej części pracy autorzy omawiają funktorialność kohomologii Morse'a.

W [H3] autorzy konstruują homologie Morse'a dla tzw. funkcjonału $2p$ -powierzchni

$$f(u) = \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (1 + |\nabla u|^2)^p + \int_{\Omega} G(u),$$

określonego na przestrzeni Banacha $X = W_0^{1,2p}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest ograniczoną, regularną dziedziną) przy założeniu, że wszystkie punkty krytyczne u funkcjonału f są niezdegenerowane, co rozumiane jest jako injektywność $d^2 f(u) : X \rightarrow X^*$ dla każdego $u \in \text{crit}(f)$, oraz odpowiednim warunkiem ograniczonego wzrostu. Należy zaznaczyć, że funkcjonal f nie może mieć punktów krytycznych niezdegenerowanych w zwykłym sensie, bo dziedzina nie jest izomorficzna z jej przestrzenią dualną. Z drugiej strony injektywność drugiej różniczki można uzyskać za pomocą dowolnie małych perturbacji.

Używając argumentów jak w pracach S. Cingolani i G. Vannella autorzy pokazują, że punkty krytyczne są izolowane i mają skończony indeks Morse'a. Z kolei warunek ograniczonego wzrostu pociąga warunek Palais-Smale'a. Ważnym punktem konstrukcji jest zastosowanie abstrakcyjnego wyniku Abbondandolo i Majera - pierwsze, zdaniem autorów, konkretne zastosowanie tej teorii w przestrzeniach Banacha. W tym celu konstruują na X zupełne pole wektorowe Morse'a F , dla którego funkcjonal f jest funkcją Lapunowa. Dla punktów krytycznych u i v spełniających zależność $\mu(v) = \mu(u) - 1$ warunek Morse'a-Smale'a zapewnia, że przecięcie $\mathcal{M}(u, v)$ rozmaitości niestabilnej punktu u z rozmaitością stabilną punktu v składa się ze skończonej wielu trajektorii przepływu pola F łączących u z v . Pozwala to zdefiniować operator brzegu

$$\partial u = \sum_{\mu(v)=\mu(u)-1} (\#\mathcal{M}(u, v) \bmod 2) v$$

na przestrzeni łańcuchów

$$C_k(f) = \bigoplus_{\mu(u)=k} \mathbb{Z}_2 \langle u \rangle,$$

co nadaje parze $(C_k(f), \partial)$ strukturę kompleksu łańcuchowego, którego homologie $HM_*(f; \mathbb{Z}_2)$ są żądanymi homologiami Morse'a. Autorzy pokazują, że $HM_*(f; \mathbb{Z}_2)$ są dobrze określone i izomorficzne z homologiami singularnymi $H_*(X; \mathbb{Z}_2)$.

Dr Starostka jest jedynym autorem pracy [H4]. Bada właściwe pola wektorowe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, czyli takie, że przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte. Rozważmy rodzinę $\{f_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ funkcji na $\mathbb{R}^n$ taką, że odpowiadająca jej rodzina gradientów $\{\nabla f_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ stanowi ciągłą rodzinę właściwych pól wektorowych. Oznaczmy przez η_λ potok generowany przez ∇f_λ . W [H4, Proposition 2.4] autor dowodzi istnienia $R > 0$ takiego, że kula $B(R)$ jest otoczeniem izolującym dla każdego potoku η_λ , a ponadto dla każdego λ oraz każdego $R' > R$ części niezmiennicze kul $B(R')$ i $B(R)$ względem η_λ są równe. Wynika stąd istnienie tzw. maksymalnego ograniczonego zbioru niezmienniczego. Fakt ten jest istotnie wykorzystywany w pracach [H5] i [H6].

Ponadto rodzina $\{\eta_\lambda\}$, o której mowa wyżej, wyznacza kontynuację względem otoczenia izolującego $B(R)$. Na mocy własności kontynuacji indeksy Conleya zbiorów niezmienniczych $\text{inv}(B(R), \eta_\lambda)$ nie zależą od λ . Wykorzystując ten wniosek autor pokazuje przykład dwóch pól właściwych na $\mathbb{R}^n$, które są homotopijne poprzez homotopie właściwe ale nie są homotopijne poprzez homotopie właściwe gradientowe. Wynik ten pokazuje, że rozważany przypadek różni się od sytuacji na kuli domkniętej, gdzie A. Parusiński wykazał, że nieznikające na sferze, homotopijne gradientowe pola wektorowe są homotopijne również poprzez homotopię gradientową, a zatem są klasyfikowane przez swój stopień.

Prace [H5] i [H6] poświęcone są hipotezie Arnolda. Nowe podejście oparte jest na teorii indeksu Conleya. Niech (M, ω) będzie zamkniętą rozmaitością symplektyczną, $H : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ gładkim Hamiltonianem zależnym od czasu i niech φ_t oznacza dyfeomorfizm (zwany potokiem) generowany przez H . Dyfeomorfizm $\varphi : M \rightarrow M$ nazywamy *hamiltonowskim*, jeżeli istnieje hamiltonian H taki, że $\varphi = \varphi_1$. W szczególności punkty stałe dyfeomorfizmu hamiltonowskiego odpowiadają orbitom 1-okresowym potoku hamiltonowskiego.

Hipoteza Arnolda, sformułowana w latach sześćdziesiątych poprzedniego wieku, mówi, że liczba punktów stałych dyfeomorfizmu hamiltonowskiego jest nie mniejsza niż liczba punktów krytycznych jakie musi mieć funkcja gładka $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Za sprawą Floera dużą popularność zyskała tak zwana homologiczna hipoteza Arnolda: jeżeli wszystkie punkty stałe dyfeomorfizmu hamiltonowskiego są niezdegenerowane, to ich liczba jest nie mniejsza niż suma liczb Bettię rozmaitości.

W pełnej ogólności pytanie Arnolda (zdegenerowana hipoteza Arnolda) jest wciąż otwarte, choć znanych jest wiele wyników częściowych, np. dla wspomnianego torusa, czy zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{C}P^n$, co pokazał B. Fortune. W pracy [H5] autorzy przedstawiają nowy dowód hipotezy Arnolda dla $\mathbb{C}P^n$: liczba punktów stałych dyfeomorfizmu hamiltonowskiego rozmaitości $\mathbb{C}P^n$, wyposażonej w symplektyczną formę Fubinię-Study'ego, jest nie mniejsza niż $n + 1$, co jest równe zarówno sumie liczb Bettię, jak i *cup-length* przestrzeni $\mathbb{C}P^n$.

Wykorzystując techniki podobne do stosowanych wcześniej (por. np. Abbondandolo), polegające na podniesieniu hamiltonianu na $\mathbb{C}P^n$ do odwzorowania jednookresowego na S^{2n+1} , a następnie jego kwadratowym rozszerzeniu do $\mathbb{R}^{2n+2}$, autorzy sprowadzają rozważany problem do poszukiwania punktów krytycznych odpowiednio zdefiniowanego hamiltonowskiego funkcjonu działania. Następnie wykorzystują indeks Conleya na przestrzeni Hilberta skonstruowany przez K. Gębę, M. Izydorka i A. Prusko. W szczególności stosują konstrukcję tego indeksu na przestrzeni Hilberta pętli Sobolewa regularności $H^{1/2}$ w $\mathbb{R}^{2n+2}$. W rozumowaniu kluczową rolę odgrywają własności kontynuacji i Ważewskiego oraz relatywny *cup-length*.

Z kolei w pracy [H6] autorzy dowodzą hipotezy Arnolda dla dyfeomorfizmów hamiltonowskich na $T^{2n} \times \mathbb{C}P^m$, pokazując, że każdy taki dyfeomorfizm ma co najmniej $2n + m + 1$ punktów stałych. Dotychczas znane wyniki dawały jedynie oszacowanie dolne równe $m + 1$. Również w tym przypadku kluczową rolę odgrywa indeks Conleya. Wykorzystywane są techniki podobne do zastosowanych w pracy [H5], choć wymagają one istotnych modyfikacji.

Podsumowując, badania dra M. Starostki mają istotne znaczenie dla teorii układów dynamicznych i geometrii symplektycznej, zwłaszcza w teorii układów hamiltonowskich, a jego cykl prac stanowi znaczący wkład w rozwój matematyki.

Na szczególne podkreślenie zasługuje kompozycja cyklu habilitacyjnego. Wchodzące w jego skład artykuły są spójne tematycznie, dobrze umotywowane i wspólnie budują teorię pozwalającą podejmować ważne i trudne problemy. Prace są zazwyczaj obszerne i merytorycznie zaawansowane, a przedstawione w nich rozumowania cechują się dużą pomysłowością i złożonością. Lektura publikacji przekonuje o doskonałym rozeznaniu autorów w problematyce badań, a przygotowanie i redakcja artykułów stoją na wysokim poziomie. W tym ostatnim aspekcie sam autoreferat pozostawia pewien niedosyt - zawiera cenne idee, motywacje i szerszy kontekst badań, co jest bardzo pomocne, jednak brakuje dopracowania szczegółów, a miejscami

pojawiają się błędy. Nie wpływa to jednak na moją ogólnie bardzo pozytywną ocenę osiągnięć dra Starostki.

Samodzielność dra Starostki nie budzi wątpliwości. Wśród prac habilitacyjnych jedna jest w pełni samodzielna, pozostałe powstały we współpracy, przy czym dołączone oświadczenia współautorów potwierdzają istotny wkład dra Starostki.

Na pozostały dorobek publikacyjny dra Starostki składa się dziesięć publikacji, z czego trzy opublikowane zostały przed doktoratem, oraz trzy preprinty. Wśród prac opublikowanych po doktoracie cztery, w których współautorem jest N. Waterstraat, dotyczą teorii potoku spektralnego. Pozostałe poświęcone są tematyce powiązanej z cyklem prac habilitacyjnych. Opublikowane są w uznanych czasopismach i prezentują wysoki poziom.

Doświadczenie dra Starostki w pozyskiwaniu i realizacji grantów oceniam bardzo wysoko. Jest kierownikiem i głównym wykonawcą grantu NCN i DFG Weave-UNISONO *Morse theoretical methods in Analysis, Dynamics, and Geometry*. Wcześniej był kierownikiem grantu NCN PRELUDIUM. Ponadto uczestniczył jako współwykonawca w realizacji trzech innych grantów naukowych, w tym w dwóch jako post-doc. Pierwszy, dwuletni staż podoktorski (2018-2020), odbył w Uniwersytecie w Bochum. Wówczas współpracował z L. Asselle w projekcie *Morse theoretical methods in Hamiltonian dynamics*. Współpraca zaowocowała realizacją interesującego programu badawczego, a wyniki zawarte są w pięciu, z sześciu, pracach habilitacyjnych i jest obecnie kontynuowana w ramach grantu Weave-UNISONO. Kolejny, również dwuletni staż (2021-2023), odbywał w Uniwersytecie w Halle realizując wraz z N. Waterstratem projekt dotyczący niezmienniczego potoku spektralnego finansowany przez DFG. Efektem współpracy jest cykl pięciu publikacji.

Dr Starostka, jeszcze przed doktoratem, jako visiting scholar współorganizował miesięczny kurs *Seiberg-Witten theory and Conley index* w Massachusetts Institute of Technology.

Osiągnięcia naukowe dra Starostki są zauważane w środowisku matematycznym. Świadczą o tym, oprócz szerokiej i owocnej współpracy międzynarodowej, prośzone referaty wygłaszane na seminariach, konferencjach i warsztatach w uznanych ośrodkach naukowych w kraju i za granicą, m.in. w Princeton University. Potwierdzeniem rozpoznawalności naukowej i wysokiego poziomu prowadzonych badań jest pierwsze wyróżnienie w prestiżowym Konkursie im. Juliusza Schaudera dla młodych matematyków, organizowanym przez Uniwersyteckie Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera w Toruniu, które dr Starostka otrzymał w 2020 roku.

Według bazy Web of Science prace dra Starostki były cytowane 26 razy, w tym 8 razy bez autocytowań, a jego indeks Hirsha wynosi 3. Według bazy MathSciNet liczby te wynoszą odpowiednio 23, 7 i 4. Nie są to wyniki wysokie, jednak warto zwrócić uwagę, że większość publikacji ukazała się stosunkowo niedawno - dziesięć z piętnastu opublikowanych prac pochodzi z 2020 roku lub później.

Działalność dydaktyczna dra Starostki jest słabszą stroną wniosku - w autoreferacie wspomniano o prowadzeniu wykładów z analizy funkcjonalnej, topologii i teorii miary oraz o wypromowaniu dwóch magistrantów i wielu (liczby nie podano) licencjatów. Nie jest to jednak zaskakujące, biorąc pod uwagę kilkuletnie zatrudnienie dra Starostki na stanowiskach badawczych post-doc.

Konkluzja. Podsumowując wyrażone już wcześniej opinie stwierdzam, że osiągnięcie habilitacyjne pod tytułem *Teoria Morse'a dla hamiltonowskiego funkcjonatu działania i klasy funkcjonalów na przestrzeni Banacha*, a także całość dorobku naukowego, dydaktycznego i organizacyjnego pana doktora Macieja Starostki spełniają wymagania art. 221 ust. 14 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce", a także zwyczajowe wobec kandydatów ubiegających się o stopień doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. Tym samym z przekonaniem rekomenduję Komisji Habilitacyjnej dopuszczenie doktora Macieja Starostki do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.